Hoja 10. Estructura de los endomorfismos: Diagonalización.

1. Hallar los autovalores reales y los autovectores de $\mathbb{R}^n$ de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Además, en los casos en los que sea posible, hallar una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores, y la matriz en esa base de la aplicación lineal dada.

2. Encontrar los autovalores y los autovectores de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ dadas por las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Hallar los posibles autovalores de un endomorfismo f de un espacio vectorial V tal que $f \circ f = id_V$

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo que admite por vectores propios a $(0, 1, -2)$, $(1, 0, 4)$ y $(1, 0, -2)$. Sabiendo que $f(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$ hallar los autovalores de f.

5. Calcular los autovalores y autovectores de la matriz $\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$. Decidir si es diagonalizable.

6. Probar que si λ y μ son valores propios de f distintos y v y w son vectores propios asociados a ellos respectivamente, entonces $v + w$ **no** es vector propio de f.

7. Hallar los valores y subespacios propios de $f \in \mathrm{End}(\mathcal{P}_3^{\mathbb{R}}[x])$, donde $f(p(x)) := p'(x)$.

8. Diagonalizar las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

10. Hallar una matriz diagonal, si es posible, de los siguientes endomorfismos.

a) $f \in \text{End}(\mathbb{K}^4)$ con $\dim(\text{Nuc } f) = 2$ y autovalores 1 y -1.

b) $f \in \text{End}(\mathbb{K}^4)$ con $\dim(\text{Nuc}(f - 3Id)) = 3$ y autovalor 2.

c) $f \in \text{End}(\mathbb{K}^4)$ con dos autovalores λ_1 y λ_2 distintos con multiplicidad geométrica $d_1 = d_2 = 2$.

11. Dada $A = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calcular A^{1438} y $\lim_{n\longrightarrow\infty} A^n$.

12. Sea $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ una base del $\mathbb{K}$-espacio vectorial E y $f \in \text{End}(E)$ tal que $f(\mathbf{e}_1) = ... = f(\mathbf{e}_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i$, donde $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Demostrar que f es diagonalizable si y sólo si $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$.

13. Sea A una matriz cuadrada de orden n y nilpotente de orden p, es decir $A^p = \mathbf{0}$ y $A^{p-1} \neq \mathbf{0}$ con $p \in \mathbb{N}$. Probar que el único autovalor de A es el 0.

14. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ b & d & 1 & 0 \\ c & e & f & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinar los valores propios de A.

b) Discutir las condiciones que deben cumplir a, b, c, d, e, f para que A sea diagonalizable.

c) En las condiciones para las que A es diagonalizable, obtener los subespacios propios asociados a los dos valores propios existentes.

d) Calcular la matriz de paso (que expresa la nueva base en términos de la canónica) a la forma diagonal.

15. Demostrar o dar un contraejemplo para decidir la veracidad de las siguientes afirmaciones.

a) Toda matriz invertible es diagonalizable.

b) Si A es diagonalizable, entonces A^n es diagonalizable para $n \in \mathbb{N}$.

c) Si A y B son diagonalizables, entonces $A + B$ y AB son diagonalizables.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

17. Sea la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Probar que 1 es valor propio. Calcular sus multiplicidades algebraica y geométrica. Dar una base del subespacio propio asociado a este valor propio.

b) Estudiar si es diagonalizable y, en caso afirmativo, encontrar una matriz de paso a forma diagonal así como una base de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios.

18. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ la matriz $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

19. Estudiar para qué valores de c la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-c \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

20. Sea $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ que verifica: *a*) $f(1,1,1) = (0,0,0)$ y *b*) 2 y 3 son valores propios de f. ¿Es f diagonalizable?

21. Encontrar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

22. Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ una aplicación lineal dada por

$$f(A) = A + A^t - \operatorname{tr}(A) I,$$

siendo I la matriz identidad, A^t la matriz transpuesta de A y $\operatorname{tr}(A)$ la traza de A (la suma de todos los elementos de la diagonal principal).

a) Encuentra la matriz de f respecto de las bases canónicas.

b) Encuentra bases del núcleo y de la imagen de f.

23. Consideramos el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ \end{pmatrix}$$ donde a y b son parámetros reales.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

24. Consideramos el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donde } a \text{ es un parámetro real.}$$

a) Determina los valores de a para los que f es diagonalizable.

b) Para los valores de a obtenidos en el apartado *a*), encuentra una base diagonalizante para f, la matriz de cambio entre ella y la canónica y escribe la fórmula que relaciona la matriz de f en la nueva base con la matriz de f en la base canónica a través de la matriz de cambio.

25. En un bosque maderero, los árboles están clasificados en dos tamaños. Un censo que se hace cada 5 años reclasifica un 30 % de los árboles de tamaño menor, que pasan a ser de tamaño grande. Entre cada dos censos se corta un 10 % de los árboles de tamaño grande y se repuebla con el mismo número de árboles de tamaño pequeño. ¿Aumenta el número de árboles con el tiempo? Si inicialmente había 1000 árboles de tamaño pequeño y ninguno grande, ¿cuántos árboles de tamaño grande hay pasados 20 años? [Sugerencia: si x_n representa el número de árboles pequeños e y_n representa el número de árboles grandes después de n períodos de 5 años, se tiene $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ para una cierta matriz A que convendrá diagonalizar.]

26. Decidir de forma razonada si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

1. Sea A una matriz de tamaño n por n con coeficientes reales. Suponemos que A tiene n valores propios reales distintos y todos son positivos. Entonces existe una matriz real B tal que $B^2 = A$.

2. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial. Sean v_1, v_2 y v_3 tres vectores propios no triviales de f correspondientes a tres valores propios distintos. Entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ son linealmente independientes.

3. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita. Sean U_1, U_2 y U_3 tres subespacios de V. Si

$$V = U_1 + U_2 + U_3 \text{ y } \dim_K V = \dim_K U_1 + \dim_K U_2 + \dim_K U_3,$$

entonces la suma $U_1 + U_2 + U_3$ es directa.

4. Sean $f : V \to U$ y $g : U \to W$ dos aplicaciones lineales. Entonces

$$\mathrm{rg}(f \circ g) = \min\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}.$$

(rg(f) denota el rango de la aplicación f).

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.